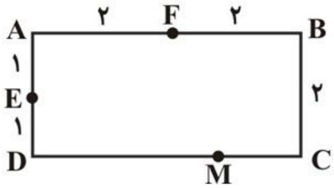
## سوالات

1

نقاط E و F اوساط اضلاع مستطیل و نقطه‌ي M روي محیط مستطیل حرکت مي‌کند. ماکزیمم مساحت EFM چه‌قدر است؟




① 2
② 4
③ 3
④ 6

2

در ذوزنقه‌ي قائم‌الزاویه‌اي نسبت دو قاعده برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر وسط قاعده‌ي کوچک‌تر را به وسط ساق قائمه وصل کنیم، مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه‌ي اصلي است؟

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$

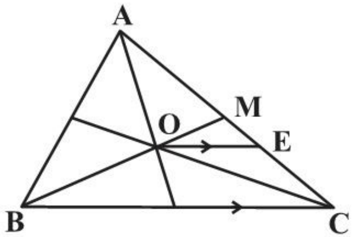
3

در مثلث متساوي الاضلاع به ضلع $\frac{\sqrt{3}}{2}$، کدام گزینه عدد بزرگ‌تري را نشان مي‌دهد؟

① حاصلضرب سه ارتفاع ② مساحت ③ عکس محیط ④ حاصلضرب سه ضلع

4

از نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌های مثلث ABC خطی موازی ضلع BC رسم کرده‌ایم تا ضلع AC را در نقطه‌ی E قطع کند. نسبت $\frac{ME}{AC}$ کدام است؟

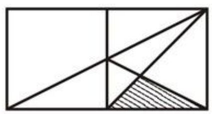



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6}$
③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{12}$

5

در شکل مقابل، دو مربع مساوي کنار هم قرار دارند. مساحت ناحیه‌ي سایه‌زده چند برابر مساحت هر مربع است؟

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{9}$
③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{9}$



## سوالات

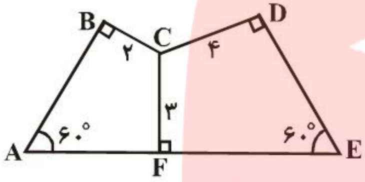
6

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع، چند برابر ضلع مثلث است؟

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$

7

در شکل مقابل، اندازه‌ي $AE$ کدام است؟ $(CF \perp AE)$




① $4\sqrt{3}$
② $7\sqrt{3}$
③ $6\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{3}$

8

نقطه‌ي دلخواه $O$ را درون شش‌ضلعي منتظمي به طول ضلع واحد در نظر بگیرید. مجموع فواصل نقطه‌ي $O$ از اضلاع شش‌ضلعي چند واحد است؟

① $\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ 3 ④ 6

9

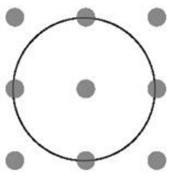
مساحت یک شکل شبکه‌ای که تعداد نقاط مرزی آن چهار برابر تعداد نقاط درونی آن باشد، برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

① 25 ② 36 ③ 21 ④ 41

10

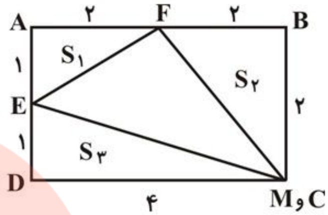
اگر برای تخمین مساحت دایره‌ی زیر به شعاع ۱cm ، فاصله بین نقاط شبکه را نصف کنیم، مساحت تخمینی نسبت به مساحت اولیه چند درصد افزایش می‌یابد؟

① 10
② 20
③ 25
④ 30



| سوال | پاسخ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 1 |
| 3 | 4 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |
| 6 | 2 |
| 7 | 3 |
| 8 | 2 |
| 9 | 4 |
| 10 | 3 |

1

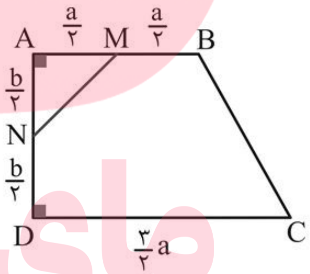



در مثلث $\overset{\Delta}{EFM}$ قاعده‌ي $EF$ ثابت است پس براي آن‌که مساحت اين مثلث بيش‌ترين مقدار ممکن را داشته باشد، بايد ارتفاع مثلث بيش‌ترين مقدار خود را داشته باشد. نقطه‌ي $M$ هر چه از $EF$ دورتر باشد، ارتفاع مثلث بزرگ‌تر مي‌شود، يعني بيش‌ترين مقدار ارتفاع، زماني است که $M$ بر رأس $C$ منطبق شود.

$$S(\overset{\Delta}{EFM}) = S(\overset{\Delta}{EFC}) = S(ABCD) - (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$= 2\times 4 - (\frac{2\times 1}{2} + \frac{2\times 2}{2} + \frac{4\times 1}{2}) = 8 - (1+2+2) = 3$$

2




با در نظر گرفتن $AB = a$ و $AD = b$ ، مطابق شکل داريم:

$$S(\overset{\Delta}{AMN}) = \frac{1}{2} AM \times AN$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{8} a.b$$

طبق فرض سؤال $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$ ، پس:

$$\frac{a}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow CD = \frac{3}{2} a$$

همچنين:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AD$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{2} a\right) \times b = \frac{5}{4} a.b$$

$$\Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{AMN})}{S(ABCD)} = \frac{\frac{1}{8} a.b}{\frac{5}{4} a.b} = \frac{1}{10}$$

3

گزينه‌ي«1»: $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$

چون در مثلث متساوي الاضلاع، هر سه ارتفاع با هم برابرند، پس:

$$\text{حاصلضرب سه ارتفاع} = (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$$

گزينه‌ي «2»:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} a.h = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} < \frac{1}{2}$$

گزينه‌ي «3» : چون در مثلث متساوي الاضلاع هر سه ضلع با هم برابرند، پس:

$$\text{محیط} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{عکس محیط} = \frac{2}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$$

گزينه‌ي«4»: $\text{حاصل‌ضرب سه‌ضلع} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{1}{2}$

يعني در بين گزينه‌ها حاصلضرب سه ضلع، بزرگترين عدد است.

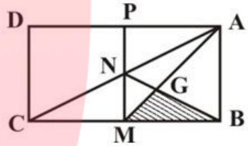
4

با توجه به این‌که هر دو میانه یکدیگر را به نسبت 1 به 2 قطع می‌کنند، داریم:

در مثلث $\overset{\Delta}{MBC}$: $\frac{MO}{BO}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{MO}{BM}=\frac{1}{3}$

$$\frac{ME}{MC}=\frac{MO}{BM}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ME}{\frac{AC}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ME}{AC}=\frac{1}{6}$$

5




با توجه به شکل، MP موازي AB و CD و به فاصله‌ي يكسان از آن‌هاست، پس با توجه به قضيه‌ي تالس براي مثلث ABC مي‌توان نتيجه گرفت كه M و N وسط اضلاع BC و AC هستند. در مثلث ABC، AM و BN ميانه‌هاي وارد بر اضلاع BC و AC هستند كه در نقطه‌ي G مركز ثقل مثلث، متقاطع‌اند.

مي‌دانيم كه سه ميانه‌ي مثلث در مركز ثقل مثلث همرسند، طوري كه مثلث را به شش مثلث هم مساحت تقسيم مي‌كنند، پس:

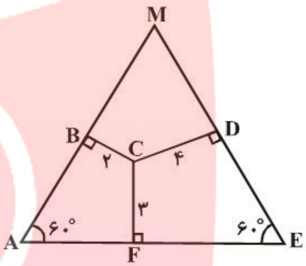
$$S(\overset{\Delta}{BGM})=\frac{1}{6}S(\overset{\Delta}{ABC})\quad(*)$$

ازطرفي واضح است كه مساحت مثلث ABC برابر مساحت يكي از مربع‌هاي كوچك است، پس از (*) نتيجه مي‌شود كه مساحت ناحيه هاشورخورده، $\frac{1}{6}$ مساحت يك مربع است.

6

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع، برابر با ارتفاع مثلث است و می‌دانیم که اگر a و h به ترتیب طول ضلع و ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه: $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

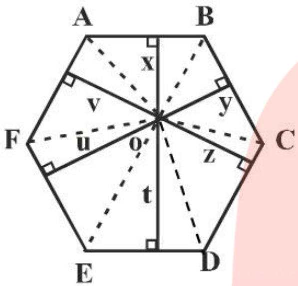
AB و DE را امتداد می‌دهیم و محل برخورد آنها را M می‌نامیم، نقطه‌ي C داخل مثلث متساوي‌الاضلاع AME قرار دارد، مجموع فواصل هر نقطه‌ي دلخواه داخل مثلث متساوي‌الاضلاع از اضلاعش برابر ارتفاع مثلث یا $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ضلع آن می‌باشد، پس:




$$BC+CD+CF=\frac{AE\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2+4+3=\frac{AE\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AE=\frac{18}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$$




اگر نقطه‌ي O را به رأس‌هاي شش‌ضلعي منتظم وصل کنیم، شش مثلث حاصل می‌شود که یك ضلع هر یك از مثلث‌ها، ضلع شش‌ضلعي و ارتفاع وارد بر این ضلع، فاصله‌ي نقطه‌ي O از ضلع شش‌ضلعي است. مجموع مساحت‌هاي این شش مثلث، برابر مساحت شش‌ضلعي منتظم است. اگر طول ضلع شش‌ضلعي برابر a باشد، آن‌گاه:

مجموع فواصل نقطه‌ي O از اضلاع شش‌ضلعي

$$\frac{1}{2}a(x+y+z+t+u+v)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\Rightarrow$$

$$=3\sqrt{3}a=3\sqrt{3}\times 1=3\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} S=\frac{b}{2}-1+i \\ b=4i \end{array}\right\} \Rightarrow S=\frac{4i}{2}-1+i=3i-1$$

مساحت شکل شبکه‌ای موردنظر باید به‌صورت $3k-1$ $(k \in N)$ باشد که فقط گزینه «4» این‌گونه است.

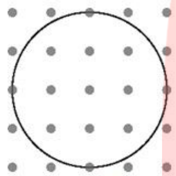


در حالتی که فاصله بین نقاط شبکه ۱cm است، داریم:

$b=4, i=1$

$S=\frac{b}{2}+i-1=2+1-1=2cm^2$

اگر فاصله‌ی بین نقطه‌های شبکه را نصف کنیم (شکل زیر) داریم:



$S=(\frac{4}{2}+9-1)(\frac{1}{2}cm)^2=10(\frac{1}{2}cm)^2=2/5cm^2$

درصد افزایش $=\frac{۲/۵-۲}{۲}\times ۱۰۰=۲۵$